2023 年度京都大学微分積分学（演義）B
補充問題解答例

中安淳

2024 年 1 月 16 日

補充問題 31

$n = 1, 2, 3, \cdots$ に対して区間 $[1, e]$ 上の関数

$$f_n(x) = \frac{n}{\sin x + nx}$$

を定義する。

(1) $x \in [1, e]$ を固定するごとに数列 $\{f_n(x)\}$ は $n \to \infty$ である数 $f(x)$ に収束する、つまり関数列 $\{f_n(x)\}$ は関数 $f(x)$ に各点収束することを示し、極限関数 $f(x)$ を求めよ。

(2) 関数列 $\{f_n(x)\}$ は $n \to \infty$ で (1) の関数 $f(x)$ に一様収束することを示せ。

(3) 次の極限を計算せよ。

$$\lim_{n\to\infty} \int_1^e f_n(x)dx.$$

解答

(1) x を固定するごとに

$$f_n(x) = \frac{n}{\sin x + nx} = \frac{1}{n^{-1}\sin x + x} \to \frac{1}{x}$$

より、$\{f_n(x)\}$ は $f(x) = \frac{1}{x}$ に各点収束する。

(2) $x \in [1, e]$ に対して、$\sin x \geq \sin e > 0$ であることに注意して計算すると、

$$f_n(x) - f(x) = \frac{n}{\sin x + nx} - \frac{1}{x} = \frac{-\sin x}{x(\sin x + nx)}$$

なので、

$$\sup_{x\in[1,e]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[1,e]} \frac{\sin x}{x(\sin x + nx)} \leq \frac{1}{\sin e + n}.$$

よって、$n \to \infty$ とすると最右辺は 0 に収束するので、はさみうちの原理より $\sup_{x\in[1,e]} |f_n(x) - f(x)| \to 0$ であり、$\{f_n(x)\}$ は $f(x)$ に $[1, e]$ 上一様収束する。

(3) (2) より極限と積分の順序交換（教科書第 5 章定理 10）ができて、

$$\lim_{n\to\infty} \int_1^e f_n(x)dx = \int_1^e f(x)dx = \int_1^e \frac{1}{x}dx = [\log x]_1^e = 1.$$

よって答えは 1 である。

補充問題 32

次の整級数の収束半径を求めよ。

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n.$

(2) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n.$

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} x^n.$

(4) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} B\left(n + \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2}\right) x^n.$

ただし、$B(p, q)$ はベータ関数である。

解答

(1) $a_n = \frac{1}{n}$ とおくと、$n \to \infty$ で

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n}{n+1} \to 1.$$

よって教科書第 5 章定理 12 より収束半径は 1 である。

(2) $a_n = \frac{1}{n!}$ とおくと、$n \to \infty$ で

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1} \to 0.$$

よって教科書第 5 章定理 12 より収束半径は ∞ である。

(3) $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}$ とおくと、$n \to \infty$ で

$$\sqrt[n]{a_n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \to e.$$

よって教科書第 5 章定理 12 より収束半径は $\frac{1}{e}$ である。

(4) $a_n = B\left(n + \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2}\right)$ とおくと、ベータ関数とガンマ関数の性質を使って $n \to \infty$ で

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{B\left(n + \frac{3}{2}, n + \frac{3}{2}\right)}{B\left(n + \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2}\right)} = \frac{\Gamma\left(n + \frac{3}{2}\right)^2}{\Gamma(2n+3)} \frac{\Gamma(2n+1)}{\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)^2}$$
$$= \frac{\left(n + \frac{1}{2}\right)^2}{(2n+2)(2n+1)} = \frac{n + \frac{1}{2}}{4(n+1)} \to \frac{1}{4}.$$

よって教科書第 5 章定理 12 より収束半径は 4 である。

補充問題 $\boxed{33}$

$\mathbb{R}$ 上で定義された次の関数 f は C^∞ 級であることを示せ。

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & (x \neq 0), \\ 1 & (x = 0). \end{cases}$$

ヒント：整級数。

解答 $\sin x$ の整級数展開を考えると、

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

であり右辺の整級数の収束半径は ∞ であった。これを $x \neq 0$ で割ると、

$$\frac{\sin x}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n} \quad (x \neq 0)$$

となり、右辺は整級数で $x = 0$ のときの値は $\frac{(-1)^0}{1!} = 1$ なので、結局

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n}$$

である。ここで右辺は収束半径 ∞ の整級数なので、$\mathbb{R}$ 全体で項別微分をすることができ（教科書第 5 章定理 15 の系）、$\mathbb{R}$ 上 C^∞ 級である。

補充問題 $\boxed{34}$

次の級数の和を計算せよ。

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2(n+3)}{2^n(n+1)(n+2)}.$$

ヒント：整級数と部分分数展開。

解答 この級数は収束半径が 1 の整級数

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2(n+3)}{(n+1)(n+2)} x^n$$

の $x = \frac{1}{2}$ での値である。係数を部分分数分解すると、

$$\frac{n^2(n+3)}{(n+1)(n+2)} = n - \frac{2n}{(n+1)(n+2)} = n + \frac{2}{n+1} - \frac{4}{n+2}.$$

よって、

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2(n+3)}{(n+1)(n+2)} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} nx^n + 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^n - 4\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+2} x^n.$$

ここで等比級数

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

を項別微分および項別積分すると、

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^{n+1} = -\log(1-x).$$

ここから計算すると $x \neq 0$ においては

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2(n+3)}{(n+1)(n+2)} x^n = \frac{x}{(1-x)^2} - 2\frac{\log(1-x)}{x} + 4\frac{\log(1-x)+x}{x^2}.$$

したがって求める級数は $x = \frac{1}{2}$ を代入して

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2(n+3)}{2^n(n+1)(n+2)} = 2 + 4\log 2 - 16\log 2 + 8 = 10 - 12\log 2.$$

よって答えは $10 - 12\log 2$ である。