2023 年度京都大学微分積分学（演義）B
第 7 回宿題解答例

中安淳

2024 年 1 月 9 日

宿題 $\boxed{29}$

広義積分
$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}dx$$
を計算せよ。

ベータ関数の値であることを見抜けたらすぐ解けます。

解答　問題文の積分は

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}dx = \int_0^1 x^{-\frac{1}{2}}(1-x)^{-\frac{1}{2}}dx$$

なので、この積分はベータ関数 $B(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ である。したがって、

$$B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(1)} = (\sqrt{\pi})^2 = \pi.$$

よって答えは π である。

見抜けない場合でもこの問題の積分は $\int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt$ 型なので、$t = \sin\theta$ という置換が有効です。

別解１　問題文の積分は

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4}-(x-\frac{1}{2})^2}}dx$$

なので、$x = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sin\theta$ と置換すると、

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\sin^2\theta}}\frac{1}{2}\cos\theta d\theta$$
$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \pi.$$

よって答えは π である。

またはベータ関数とガンマ関数の関係式 $B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$ の証明を思い出すと、$x = \sin^2\theta$ という置換も有効です。

別解２　$x = \sin^2\theta$ という置換をすると、問題文の積分は

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{\sin^2\theta(1-\sin^2\theta)}}2\sin\theta\cos\theta d\theta$$
$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \pi.$$

よって答えは π である。

宿題 $\boxed{30}$

a と R を $0 \leq a \leq R$ を満たす定数とした時に、重積分
$$\iint_D 2\sqrt{a^2-(\sqrt{x^2+y^2}-R)^2}dxdy$$
$$(D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (R-a)^2 \leq x^2+y^2 \leq (R+a)^2\})$$
を計算せよ。

この問題はドーナツ型の立体の体積を求める問題です。

解答　極座標変換 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ をするとヤコビアンは r で (x,y) が D 上を動く時 (r,θ) は $[R-a, R+a]\times[0,2\pi]$ を動くので、

$$\begin{aligned}
I &= \iint_D 2\sqrt{a^2-(\sqrt{x^2+y^2}-R)^2}dxdy \\
&= \int_{R-a}^{R+a}\left(\int_0^{2\pi} 2\sqrt{a^2-(r-R)^2}rd\theta\right)dr \\
&= 4\pi\int_{R-a}^{R+a} r\sqrt{a^2-(r-R)^2}dr \\
&= 4\pi\int_{-a}^{a}(r+R)\sqrt{a^2-r^2}dr \\
&= 4\pi\int_{-a}^{a} r\sqrt{a^2-r^2}dr + 4\pi R\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-r^2}dr.
\end{aligned}$$

このうち前半の積分は被積分関数が奇関数なので積分値は 0 で、後半の積分は半径が a の半円の面積より $\frac{1}{2}\pi a^2$ である。したがって問題の積分の値は $I = 2\pi^2 a^2 R$ である。