2023年度京都大学微分積分学（演義）B
第7回問題解答例

中安淳

2024年1月9日

問題 $\boxed{27}$

重積分

$$\iint_D (x^2-y^2)^2 dxdy \quad (D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x|+|y| \leq 1\})$$

を計算せよ。

そのまま累次積分としても計算できる問題ですが、被積分関数が $(x^2-y^2)^2 = (x+y)^2(x-y)^2$ なので一次変換 $u = x+y$, $v = x-y$ をすると変数が分離できます。

解答　一次変換 $u = x+y$, $v = x-y$ をすると、$x = \frac{u+v}{2}$, $y = \frac{u-v}{2}$ なのでヤコビアンは

$$\det \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}$$

である。さらに積分領域 D は xy 平面の $(1,0)$, $(0,1)$, $(-1,0)$, $(0,-1)$ を頂点とする正方形で、それぞれ uv 平面の $(1,1)$, $(1,-1)$, $(-1,-1)$, $(-1,1)$ に移るので、移した先の積分領域は正方形 $[-1,1]^2$ である。したがって

$$\begin{aligned}\iint_D (x^2-y^2)^2 dxdy &= \iint_{[-1,1]^2} u^2v^2 \frac{1}{2} dudv \\ &= \frac{1}{2}\int_{-1}^1 u^2 du \int_{-1}^1 v^2 dv \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3} = \frac{2}{9}.\end{aligned}$$

よって答えは $\frac{2}{9}$ である。

変数変換をしないで累次積分のみで解くと以下のようになります。

変数変換を使わない解答　積分領域は $D = \{(x,y) \mid -1 \leq x \leq 1, -1+|x| \leq y \leq 1-|x|\}$ なので、

$$\begin{aligned}&\iint_D (x^2-y^2)^2 dxdy \\ &= \int_{-1}^1 \left(\int_{-1+|x|}^{1-|x|} (y^4 - 2x^2y^2 + x^4) dy\right) dx \\ &= 2\int_{-1}^1 \left(\int_0^{1-|x|} (y^4 - 2x^2y^2 + x^4) dy\right) dx \\ &= 2\int_{-1}^1 \left(\frac{1}{5}(1-|x|)^5 - \frac{2}{3}x^2(1-|x|)^3 + x^4(1-|x|)\right) dx \\ &= 4\int_0^1 \left(\frac{1}{5}(1-x)^5 - \frac{2}{3}x^2(1-x)^3 + x^4(1-x)\right) dx \\ &= 4\left(\frac{1}{30} - \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3} - \frac{3}{4} + \frac{3}{5} - \frac{1}{6}\right) + \frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) \\ &= \frac{2}{9}.\end{aligned}$$

よって答えは $\frac{2}{9}$ である。

問題 $\boxed{28}$

広義積分
$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-x^2} dx$$
を計算せよ。ただし、正の整数 k に対して $\lim_{x\to\infty} x^k e^{-x^2} = 0$ は認めてよい。

ガウス積分 $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$ の計算と同様にすれば次のようにして解答できます。

解答 問題の広義積分は収束することに注意すれば、その値を I とおくと
$$I^2 = \iint_{\mathbb{R}^2} x^2 y^2 e^{-x^2-y^2} dxdy.$$
ここで極座標変換 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ をするとそのヤコビアンは r なので、
$$\begin{aligned} I^2 &= \int_0^{\infty} \left(\int_0^{2\pi} r^2 \cos^2\theta r^2 \sin^2\theta e^{-r^2} r d\theta \right) dr \\ &= \int_0^{\infty} r^5 e^{-r^2} dr \int_0^{2\pi} \cos^2\theta \sin^2\theta d\theta. \end{aligned}$$
あとは頑張ってこの二つの積分を計算する。まず
$$\begin{aligned} \int r^5 e^{-r^2} dr &= -\frac{1}{2} \int r^4 (e^{-r^2})' dr \\ &= -\frac{1}{2} r^4 e^{-r^2} + 2 \int r^3 e^{-r^2} dr \\ &= -\frac{1}{2} r^4 e^{-r^2} - \int r^2 (e^{-r^2})' dr \\ &= -\frac{1}{2} r^4 e^{-r^2} - r^2 e^{-r^2} + 2 \int r e^{-r^2} dr \\ &= -\frac{1}{2} r^4 e^{-r^2} - r^2 e^{-r^2} - e^{-r^2} \end{aligned}$$
より
$$\int_0^{\infty} r^5 e^{-r^2} dr = 1.$$
次に
$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \cos^2\theta \sin^2\theta d\theta &= \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \sin^2 2\theta d\theta \\ &= \frac{1}{8} \int_0^{2\pi} (1 - \cos 4\theta) d\theta = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$
よって $I^2 = 1 \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$ なので、答えは $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ である。

上記の通りで解答できますが、先に部分積分をすると計算が楽になります。

別解１ 不定積分を計算すると
$$\int x^2 e^{-x^2} dx = -\frac{1}{2} \int x (e^{-x^2})' dx = -\frac{1}{2} x e^{-x^2} + \frac{1}{2} \int e^{-x^2} dx.$$
よって
$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx.$$
右辺の積分はガウス積分の値より $\sqrt{\pi}$ なので、答えは $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ である。

さらにガンマ関数に帰着させるとほとんど計算をする必要がありません。

別解２ ガンマ関数
$$\Gamma(s) = 2 \int_0^{\infty} e^{-t^2} t^{2s-1} dt$$
に当てはめて考えると問題の積分は $\Gamma(\frac{3}{2})$ である。したがって
$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \sqrt{\pi}.$$
よって答えは $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ である。