2023 年度京都大学微分積分学（演義）B
第 6 回問題解答例

中安淳

2023 年 12 月 12 日

宿題 $\boxed{25}$

D_1 と D_2 を平面の面積確定集合として f をそれらの上で積分可能な関数とする時、

$$\iint_{D_1\cup D_2} f(x,y)dxdy + \iint_{D_1\cap D_2} f(x,y)dxdy = \iint_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint_{D_2} f(x,y)dxdy$$

が成り立つことを示せ。

ヒント：まず $D_1\cap D_2$ が空集合の時の $\iint_{D_1\cup D_2} fdxdy = \iint_{D_1} fdxdy + \iint_{D_2} fdxdy$ を積分の線形性によって示す。

解答　$D_1\cap D_2$ が空集合の時を示す。$D_1\cup D_2$ 上定義された関数 f に対して、

$$f_1(P) = \begin{cases} f(P) & (P\in D_1) \\ 0 & (P\notin D_1) \end{cases}, \quad f_2(P) = \begin{cases} f(P) & (P\in D_2) \\ 0 & (P\notin D_2) \end{cases}$$

とおけば、$f = f_1 + f_2$ より積分の線形性から

$$\iint_{D_1\cup D_2} fdxdy = \iint_{D_1\cup D_2} f_1dxdy + \iint_{D_1\cup D_2} f_2dxdy = \iint_{D_1} fdxdy + \iint_{D_2} fdxdy$$

を得る。

$D_1\cap D_2$ が空集合とは限らない時は、$D_2 = (D_1\cap D_2)\cup(D_2\setminus D_1)$ と分解することにより、

$$\begin{aligned}&\iint_{D_1\cup D_2} fdxdy + \iint_{D_1\cap D_2} fdxdy \\ &= \iint_{D_1} fdxdy + \iint_{D_2\setminus D_1} fdxdy + \iint_{D_1\cap D_2} fdxdy \\ &= \iint_{D_1} fdxdy + \iint_{D_2} fdxdy\end{aligned}$$

であることがわかる。

出題した時の想定解は上記の通りですが、よく考えると別に $D_1\cap D_2 = \emptyset$ の時を先に示す必要はありませんでした。

別解　$D_1\cup D_2$ 上定義された関数 f に対して、f_1, f_2 を上の解答例の通りに定めて、

$$g(P) = \begin{cases} f(P) & (P\in D_1\cap D_2) \\ 0 & (P\notin D_1\cap D_2) \end{cases}$$

とおくと、$f = f_1 + f_2 - g$ より積分の線形性から示すべき等式が得られる。

注意　厳密なことを言うと最初の解答例も別解も f が $D_1\cap D_2$ 上で積分可能であることを暗に認めて使っていますが、このことは次のようにして示せます。つまり、別解の関数 g は f と教科書第 7 章 1 節 (III) でいうところの特性関数 χ_{D_1}, χ_{D_2} の積

$$g(P) = f(P)\chi_{D_1}(P)\chi_{D_2}(P)$$

となっていて、これらは有界で積分可能なので教科書第 7 章 1 節 (III) にある通り積 g も積分可能である。

宿題 $\boxed{26}$

パラメータ $L>0$ を含んだ重積分

$$I=\iint_{[0,L]^2} e^{-xy}\sin x dxdy$$

を二通りに計算することで、広義積分

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx=\lim_{L\to\infty}\int_0^L \frac{\sin x}{x}dx$$

の値を求めよ。

この問題の広義積分はディリクレ積分と呼ばれ、（絶対収束しないが）条件収束する広義積分の例です。問題を解く上では重積分は x で先に積分しても y で先に積分しても同じ値が求まるということを使います。それによると、

$$\begin{aligned}\int_0^L \frac{\sin x}{x}dx=\arctan L+\int_0^L e^{-Lx}\frac{\sin x}{x}dx\\ -\int_0^L e^{-Ly}\frac{\cos L+y\sin L}{1+y^2}dy\end{aligned}$$

を得て、後ろ 2 つの積分が計算できませんが不等式で評価すれば $L\to\infty$ でともに 0 に収束することがわかります。

解答　先に y で積分することを考えると、

$$\begin{aligned}\int_0^L e^{-xy}\sin x dy&=\left[-\frac{1}{x}e^{-xy}\sin x\right]_0^L\\ &=-\frac{1}{x}(e^{-Lx}-1)\sin x=(1-e^{-Lx})\frac{\sin x}{x}\end{aligned}$$

より、

$$I=\int_0^L \frac{\sin x}{x}dx-\int_0^L e^{-Lx}\frac{\sin x}{x}dx.$$

先に x で積分することを考えると、

$$\begin{aligned}\int e^{-xy}\sin x dx&=\int e^{-xy}(-\cos x)'dx\\ &=-e^{-xy}\cos x-y\int e^{-xy}\cos x dx\\ &=-e^{-xy}\cos x-y\int e^{-xy}(\sin x)'dx\\ &=-e^{-xy}\cos x-ye^{-xy}\sin x-y^2\int e^{-xy}\sin x dx\end{aligned}$$

なので、

$$\int e^{-xy}\sin x dx=-\frac{1}{1+y^2}e^{-xy}(\cos x+y\sin x)+C$$

より、

$$\begin{aligned}\int_0^L e^{-xy}\sin x dx&=-\frac{1}{1+y^2}\left[e^{-xy}(\cos x+y\sin x)\right]_0^L\\ &=\frac{1}{1+y^2}\left(1-e^{-Ly}(\cos L+y\sin L)\right).\end{aligned}$$

よって、

$$I=\int_0^L \frac{1}{1+y^2}dy-\int_0^L e^{-Ly}\frac{\cos L+y\sin L}{1+y^2}dy.$$

ここで、

$$\int_0^L \frac{1}{1+y^2}dy=[\arctan y]_0^L=\arctan L$$

である。よって以上より

$$\begin{aligned}\int_0^L \frac{\sin x}{x}dx=\arctan L+\int_0^L e^{-Lx}\frac{\sin x}{x}dx\\ -\int_0^L e^{-Ly}\frac{\cos L+y\sin L}{1+y^2}dy\end{aligned}$$

である。

あとは $L\to\infty$ とした時に後ろ 2 つの積分が 0 に収束することを示す。一つ目の積分は $x\geq 0$ で $-x\leq \sin x\leq x$ を使うことで、

$$\begin{aligned}\left|\int_0^L e^{-Lx}\frac{\sin x}{x}dx\right|\leq\int_0^L e^{-Lx}\frac{|\sin x|}{x}dx\leq\int_0^L e^{-Lx}dx\\ =\frac{1}{L}(1-e^{-L^2})\to 0.\end{aligned}$$

二つ目の積分も同様に

$$\begin{aligned}\left|\int_0^L e^{-Ly}\frac{\cos L+y\sin L}{1+y^2}dy\right|&\leq\int_0^L e^{-Ly}\frac{|\cos L+y\sin L|}{1+y^2}dy\\ &\leq\int_0^L e^{-Ly}\frac{\sqrt{1+y^2}}{1+y^2}dy\\ &\leq\int_0^L e^{-Ly}dy\\ &=\frac{1}{L}(1-e^{-L^2})\to 0.\end{aligned}$$

以上より、

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx=\lim_{L\to\infty}\int_0^L \frac{\sin x}{x}dx=\lim_{L\to\infty}\arctan L=\frac{\pi}{2}.$$

よって答えは $\frac{\pi}{2}$ である。