2023 年度京都大学微分積分学（演義）B
第 6 回問題解答例

中安淳

2023 年 12 月 12 日

問題 $\boxed{23}$

次の重積分を計算せよ。

(1) $\displaystyle\iint_{[1,2]\times[3,4]}(1+x+y+xy)dxdy.$

(2) $\displaystyle\iint_{[0,1]\times[0,1]}x^2ye^{xy^2}dxdy.$

x の積分を先に計算しても y の積分を先に計算しても結果は同じですが、計算量が変わることがあります。今回の問題の (2) では原始関数が求めやすい y の積分を先にすると楽です。

解答

(1) y で先に積分すると、

$$\begin{aligned}&\iint_{[1,2]\times[3,4]}(1+x+y+xy)dxdy\\&=\int_1^2\left(\int_3^4(1+x+y+xy)dy\right)dx\\&=\int_1^2\left[y+xy+\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{2}xy^2\right]_3^4dx\\&=\int_1^2\left(1+x+\frac{7}{2}+\frac{7}{2}x\right)dx\\&=\left[x+\frac{1}{2}x^2+\frac{7}{2}x+\frac{7}{4}x^2\right]_1^2\\&=1+\frac{3}{2}+\frac{7}{2}+\frac{7\cdot 3}{4}=\frac{45}{4}.\end{aligned}$$

よって答えは $\frac{45}{4}$ である。

(2) y で先に積分すると、

$$\int x^2ye^{xy^2}dy=\frac{1}{2}xe^{xy^2}+C$$

より、

$$\begin{aligned}&\iint_{[0,1]\times[0,1]}x^2ye^{xy^2}dxdy\\&=\int_0^1\left(\int_0^1x^2ye^{xy^2}dy\right)dx=\int_0^1\left[\frac{1}{2}xe^{xy^2}\right]_0^1dx\\&=\int_0^1\left(\frac{1}{2}xe^x-\frac{1}{2}x\right)dx.\end{aligned}$$

ここで、

$$\int xe^xdx=\int x(e^x)'dx=xe^x-\int e^xdx=xe^x-e^x+C$$

より、

$$\begin{aligned}\iint_{[0,1]\times[0,1]}x^2ye^{xy^2}dxdy&=\left[\frac{1}{2}(xe^x-e^x)-\frac{1}{4}x^2\right]_0^1\\&=0-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}-0=\frac{1}{4}.\end{aligned}$$

よって答えは $\frac{1}{4}$ である。

注意　(1) は

$$\begin{aligned}&\iint_{[1,2]\times[3,4]}(1+x+y+xy)dxdy\\&=\iint_{[1,2]\times[3,4]}(1+x)(1+y)dxdy\\&=\iint_{[2,3]\times[4,5]}xydxdy=\left(\int_2^3xdx\right)\cdot\left(\int_4^5ydy\right)\end{aligned}$$

と変形することでも計算をすることができます。

問題 $\boxed{24}$

積分

$$\int_0^1\left(\int_x^1e^{-y^2}dy\right)dx$$

を計算せよ。

e^{-y^2} はガウス関数と呼ばれ不定積分を計算するのは困難なので、x で先に積分しましょう。解答例では式でさらっと書いていますが、積分領域は図にするとわかりやすいです。

解答　y で先に積分することを考えると、重積分としての積分領域は

$$\{(x,y)\mid 0\le x\le 1,x\le y\le 1\}=\{(x,y)\mid 0\le y\le 1,0\le x\le y\}$$

なので、

$$\begin{aligned}\int_0^1\left(\int_x^1e^{-y^2}dy\right)dx&=\int_0^1\left(\int_0^ye^{-y^2}dx\right)dy=\int_0^1ye^{-y^2}dy\\&=\left[-\frac{1}{2}e^{-y^2}\right]_0^1=-\frac{1}{2}e^{-1}+\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

よって答えは $\frac{e-1}{2e}$ である。