2023年度京都大学微分積分学（演義）B
第5回宿題解答例

中安淳

2023年11月28日

宿題 $\boxed{21}$

三角形の3つの角をそれぞれ x, y, z とする時、

$$\cos x + \cos y + \cos z$$

の最大・最小を答えよ。

解答　この問題は $x + y + z = \pi$ という束縛条件があるので $z = \pi - x - y$ として z を消去して、

$$f(x, y) = \cos x + \cos y - \cos(x + y)$$

の $x, y > 0, x + y < \pi$ つまり

$$D = \{(x, y) \mid x, y > 0, x + y < \pi\}$$

上での最大・最小を考えることに帰着される。D は開集合であることに注意する。

$f(x, y)$ の一階偏導関数は

$$f_x(x, y) = -\sin x + \sin(x + y), \quad f_y(x, y) = -\sin y + \sin(x + y).$$

ここから $(a, b) \in D$ を極大・極小となる点とすると

$$\begin{aligned} f_x(a, b) &= -\sin a + \sin(a + b) = 0, \\ f_y(a, b) &= -\sin b + \sin(a + b) = 0 \end{aligned}$$

を満たす。ここから $\sin a = \sin b = \sin(a + b)$ であり、$0 < a, b < \pi$ なので、$b = a$ または $b = \pi - a$ だが後者は $\sin(a + b) = 0$ となり不適。よって $a = b$ で、$\sin a = \sin 2a = 2 \sin a \cos a$ なので、やはり $0 < a < \pi$ なので、$\cos a = \frac{1}{2}$ つまり $a = \frac{\pi}{3}$。以上より最大・最小となる点の候補は $(a, b) = (\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3})$ のみであり、その点での f の値は $\frac{3}{2}$ である。

ここで定義域 D に境界点を付けて得られる集合 $E = \{(x, y) \mid x, y \geq 0, x + y \leq \pi\}$ は有界閉集合なので、連続関数 $f(x, y)$ は E 上で最大値と最小値を取る。境界点のうち $x = 0$ を満たすものは $f(0, y) = 1 + \cos y - \cos y = 1$ となり、同様にして $f(x, 0) = 1$ で、$x + y = \pi$ の場合も $f(x, y) = \cos x + \cos y + 1 = \cos x - \cos x + 1 = 1$ となる。つまり境界点においては f の値は常に1である。ここで $f(x, y)$ は $(x, y) = (\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3})$ または境界点で最大・最小となるので、最大は $(x, y) = (\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3})$ で最小は境界点でそれぞれ達成する。

以上より $x = y = z = \frac{\pi}{3}$ の時に最大値 $\frac{3}{2}$ を達成し、最小となる点はない。

注意　a, b に関する方程式は三角関数の和積公式を使って、

$$\begin{aligned} -\sin a + \sin(a + b) &= 2 \cos\left(a + \frac{b}{2}\right) \sin \frac{b}{2} = 0, \\ -\sin b + \sin(a + b) &= 2 \cos\left(b + \frac{a}{2}\right) \sin \frac{a}{2} = 0 \end{aligned}$$

と変形することでも解くことができます。

上記の解答例では束縛条件を使って1文字消去しましたが、ラグランジュの未定乗数法により解答することもできます。

別解　束縛条件

$$\varphi(x, y, z) = x + y + z - \pi = 0, \quad (x, y, z > 0)$$

のもとで関数

$$f(x, y, z) = \cos x + \cos y + \cos z$$

の最大・最小を考える。ラグランジュの未定乗数法により $(x, y, z) = (a, b, c)$ で極値を取るならば

$$-\sin a - \lambda = 0, \quad -\sin b - \lambda = 0, \quad -\sin c - \lambda = 0$$

より $\sin a = \sin b = \sin c = -\lambda$ を満たす λ が存在する。これを解くと、（中略）、$(a, b, c) = (\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3})$ であることがわかる。境界点の取り扱いは上記の解答例と同様で、最終的に $x = y = z = \frac{\pi}{3}$ の時に最大値 $\frac{3}{2}$ を達成し、最小となる点はないことがわかる。

宿題 $\boxed{22}$

二変数関数

$$f(x,y) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}y^4 - \frac{1}{2}y^2 + xy - 3x$$

に対して

$$\inf_{x\in\mathbb{R}} \sup_{y\in\mathbb{R}} f(x,y)$$

の値を求めよ。

解答例を見ればわかる通り、最終的に停留点 $f_x(x,y) = f_y(x,y) = 0$ を求めることになりますが、そこに至るまでがこの問題の重要な点のつもりです。

解答　$x \in \mathbb{R}$ を固定するごとに $f(x,y)$ は $|y| \to \infty$ で $f(x,y) \to -\infty$ より y について最大値を達成しその点 (x,y) で

$$f_y(x,y) = -y^3 - y + x = 0$$

を満たす。$f_y(x,y)$ は y について狭義単調減少なので、$x \in \mathbb{R}$ ごとに上の方程式 $y^3 + y - x = 0$ を満たす $y \in \mathbb{R}$ がただ一つ存在しそこで $f(x,y)$ は y について最大値を達成する。

あとは $f_y(x,y) = 0$ を満たしつつ $f(x,y)$ を最小にするという問題になる。よって、$f_{yy}(x,y) = -3y^2 - 1 < 0$ が常に成り立つことに注意して、ラグランジュの未定乗数法より最小となる (x,y) においては

$$f_x(x,y) - \lambda f_{yx}(x,y) = 0, \quad f_y(x,y) - \lambda f_{yy}(x,y) = 0$$

となる $\lambda \in \mathbb{R}$ が存在する。ここで $f_y(x,y) = 0$ であるから、$\lambda f_{yy}(x,y) = 0$ つまり $\lambda = 0$ なので、$f_x(x,y) = 0$ となる。以上より

$$f_x(x,y) = x + y - 3 = 0, \quad f_y(x,y) = -y^3 - y + x = 0$$

で、$x = -y + 3$ から x を消去すると

$$y^3 + 2y - 3 = (y-1)(y^2 - 3y + 3) = 0.$$

よって $y = 1$ しか解はなく、その時 $x = 2$ である。

あとはどうにかすればこの $x = 2$ のとき最小を達成することがわかるので、問題の答えは $f(2,1) = -\frac{11}{4}$ である。