# 2023 年度京都大学微分積分学（演義）B
# 第 4 回宿題解答例

中安淳

2023 年 11 月 14 日

**宿題 17**

二変数関数

$$f(x,y)=\frac{1}{\sqrt{y}}e^{-\frac{x^2}{4y}}\quad(x\in\mathbb{R},y>0)$$

は偏導関数に関する式 $f_{xx}=f_y$ を満たすことを示せ。

**解答** $f(x,y)=y^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{x^2}{4y}}$ の偏導関数を計算すると、

$$f_x(x,y)=y^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{-2x}{4y}\right)e^{-\frac{x^2}{4y}}=-\frac{1}{2}xy^{-\frac{3}{2}}e^{-\frac{x^2}{4y}},$$

$$\begin{aligned}f_{xx}(x,y)&=-\frac{1}{2}y^{-\frac{3}{2}}e^{-\frac{x^2}{4y}}-\frac{1}{2}y^{-\frac{3}{2}}\left(\frac{-2x}{4y}\right)e^{-\frac{x^2}{4y}}\\&=\left(-\frac{1}{2}y^{-\frac{3}{2}}+\frac{1}{4}x^2y^{-\frac{5}{2}}\right)e^{-\frac{x^2}{4y}},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f_y(x,y)&=-\frac{1}{2}y^{-\frac{3}{2}}e^{-\frac{x^2}{4y}}+y^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{x^2}{4y^2}\right)e^{-\frac{x^2}{4y}}\\&=\left(-\frac{1}{2}y^{-\frac{3}{2}}+\frac{1}{4}x^2y^{-\frac{5}{2}}\right)e^{-\frac{x^2}{4y}}.\end{aligned}$$

よって $f_{xx}(x,y)=f_y(x,y)$ が成り立つ。

**注意** この式 $f_y=f_{xx}$ は熱伝導の方程式や熱方程式、拡散方程式などと呼ばれ、それを満たす今回の問題の関数 $f(x,y)=\frac{1}{\sqrt{y}}e^{-\frac{x^2}{4y}}$ のことをその基本解と言います。

**宿題 18**

以下の問いに答えよ。

(1) 原点以外の平面の点をそこから最も近い単位円（原点を中心とする半径 1 の円）周上の点に写す変換は（単位円への）射影と呼ばれる。この変換のヤコビアンは常に 0 であることを示せ。

(2) 原点以外の平面の点を原点からの向きを保ったまま原点からの距離が逆数になるようにして平面上の点に写す変換は（単位円に関する）反転と呼ばれる。この変換のヤコビアンを求めよ（点の座標によることに注意）。

**解答**

(1) この変換 $F_1=(f,g)$ は

$$f(x,y)=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad g(x,y)=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

と表される（詳細省略）。ここからヤコビ行列は

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}f_x&f_y\\g_x&g_y\end{pmatrix}&=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}^3}&-\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}^3}\\-\frac{yx}{\sqrt{x^2+y^2}^3}&\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}^3}\end{pmatrix}\\&=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}^3}\begin{pmatrix}y^2&-xy\\-yx&x^2\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

よってヤコビアンはその行列式を計算して、

$$\frac{\partial(f,g)}{\partial(x,y)}=\frac{1}{(x^2+y^2)^3}(y^2x^2-(xy)^2)=0$$

である。

(2) この変換 $F_2=(f,g)$ は

$$f(x,y)=\frac{x}{x^2+y^2},\quad g(x,y)=\frac{y}{x^2+y^2}$$

と表される（詳細省略）。ここからヤコビ行列は

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}f_x&f_y\\g_x&g_y\end{pmatrix}&=\begin{pmatrix}\frac{1}{x^2+y^2}-\frac{2x^2}{(x^2+y^2)^2}&-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\\-\frac{2yx}{(x^2+y^2)^2}&\frac{1}{x^2+y^2}-\frac{2y^2}{(x^2+y^2)^2}\end{pmatrix}\\&=\frac{1}{(x^2+y^2)^2}\begin{pmatrix}y^2-x^2&-2xy\\-2yx&x^2-y^2\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

よってヤコビアンはその行列式を計算して、

$$\frac{\partial(f,g)}{\partial(x,y)}=\frac{1}{(x^2+y^2)^4}(-(x^2-y^2)^2-4x^2y^2)=\frac{-1}{(x^2+y^2)^2}$$

である。

**注意** (1) は $F_1$ が単射でないということからヤコビアンが 0 であるということはすぐわかります。