2023 年度京都大学微分積分学（演義）B
第 4 回問題解答例

中安淳

2023 年 11 月 14 日

問題 15

原点を中心とする半径 1 の円の内部 $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$ で二変数関数

$$f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

は全微分可能であることを示し、そのグラフ $z = f(x, y)$ 上の点 $(a, b, f(a, b))$ $((a, b) \in D)$ での接平面の方程式を求めよ。

与えられた曲面は xyz 空間の原点 $(0, 0, 0)$ を中心とする半径 1 の球面の一部です。全微分可能性は直接確かめるよりもより強い条件である C^1 級の方が示しやすいことが多いです。

解答　偏導関数を計算すると、

$$f_x(x, y) = \frac{-x}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}, \quad f_y(x, y) = \frac{-y}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}.$$

これらは D 上の連続関数なので f は C^1 級であり特に全微分可能である。ここで接平面の方程式は

$$z = f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b) + f(a, b)$$

なので、計算すると

$$\begin{aligned} z &= \frac{-a}{\sqrt{1 - a^2 - b^2}}(x - a) + \frac{-b}{\sqrt{1 - a^2 - b^2}}(y - b) + \sqrt{1 - a^2 - b^2} \\ &= \frac{1 - ax - by}{\sqrt{1 - a^2 - b^2}}. \end{aligned}$$

注意　高校で習っているはずの円 $x^2 + y^2 = 1$ の点 (a, b) での接線の方程式 $ax + by = 1$ の類推で、球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ の点 (a, b, c) での接平面の方程式は $ax + by + cz = 1$ です。今回の問題では $c = \sqrt{1 - a^2 - b^2}$ なので、代入して z について解けば同じ式を得られていることがわかります。

問題 16

$f(x, y)$, $g(x, y)$ を二変数 C^1 級関数、$\varphi(t)$ を一変数 C^1 級関数とするとき、全微分に関する次の式が成り立つことを示せ。

$$d(fg) = gdf + fdg, \quad d(\varphi \circ f) = (\varphi' \circ f)df.$$

ただし、一変数関数 $\varphi(t)$ に対して $\varphi \circ f$ は合成関数 $(\varphi \circ f)(x, y) = \varphi(f(x, y))$ を表す。

与えられた全微分を dx, dy で表しましょう。

解答　計算すると積の微分により

$$\begin{aligned} d(fg) &= (fg)_x dx + (fg)_y dy \\ &= (f_x g + f g_x)dx + (f_y g + f g_y)dy, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} gdf + fdg &= g(f_x dx + f_y dy) + f(g_x dx + g_y dy) \\ &= (g f_x + f g_x)dx + (g f_y + f g_y)dy. \end{aligned}$$

計算結果が等しいので、$d(fg) = gdf + fdg$ である。

同様にして合成関数の微分により

$$\begin{aligned} d(\varphi \circ f) &= (\varphi \circ f)_x dx + (\varphi \circ f)_y dy \\ &= (\varphi' \circ f) f_x dx + (\varphi' \circ f) f_y dy \\ &= (\varphi' \circ f)(f_x dx + f_y dy) \\ &= (\varphi' \circ f)df \end{aligned}$$

である。

注意　この問題の結論は f, g が 3 変数以上でも同じ式が成り立ちます（ただし、途中計算式の項数が増える）。