2023年度京都大学微分積分学（演義）B
第3回宿題解答例

中安淳

2023年10月31日

宿題 $\boxed{13}$

点列の極限の一意性を示せ。つまり点列 $\{P_n\}$ に対して $P_n \to P$ となる点 P と $P_n \to Q$ となる点 Q が存在したら $P = Q$ であることを示せ。

解答 点列の収束の定義から $d(P, P_n) \to 0,\ d(Q, P_n) \to 0$ である。ここで和の極限より $d(P, P_n) + d(Q, P_n) \to 0$ が成り立つ。よって、三角不等式と距離の対称性より

$$d(P, Q) \leq d(P, P_n) + d(Q, P_n) \to 0.$$

ここで $d(P, Q)$ は n によらないので、距離の正値性から $d(P, Q) = 0$ つまり $P = Q$ である。

宿題 $\boxed{14}$

分母が0にならない範囲で定義された次の二変数関数を考える。

$$f(x, y) = \frac{\sin(xy)}{e^x + e^y - x - y - 2}.$$

(1) $f(x, y)$ は原点を除く平面上で定義されて、その上で連続であることを示せ。

(2) 極限 $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$ を求めよ。

(2) は指数関数と三角関数の漸近展開により、$f(x, y)$ は原点の近くで $\frac{2xy}{x^2+y^2}$ と見なすことができ、そしてこの関数は原点で連続でないです。

解答

(1) 分母は

$$e^x + e^y - x - y - 2 = (e^x - 1 - x) + (e^y - 1 - y)$$

とでき、一般に $e^t \geq 1 + t$ で等号成立条件は $t = 0$ なので、分母が0になるのは $(x, y) = (0, 0)$ の場合のみである。よってあとは連続関数の合成になっているので、この関数は少なくとも原点を除いた範囲で連続である。

(2) 漸近展開 $e^t = 1 + t + \frac{1}{2}t^2 + o(t^2),\ \sin t = t + o(t)\ (t \to 0)$ より、$(x, y) \to 0$ において

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \frac{xy + o(xy)}{\frac{1}{2}x^2 + o(x^2) + \frac{1}{2}y^2 + o(y^2)} \\ &= \frac{\frac{xy}{x^2+y^2} + \frac{o(xy)}{x^2+y^2}}{\frac{1}{2} + \frac{o(x^2)}{x^2+y^2} + \frac{o(y^2)}{x^2+y^2}} \\ &= \frac{\frac{xy}{x^2+y^2} + o(1)}{\frac{1}{2} + o(1)} \end{aligned}$$

ここで他の部分は収束するが、二変数関数 $\frac{xy}{x^2+y^2}$ は発散だったので（講義でやった）、問題の関数 $f(x, y)$ も $(x, y) \to (0, 0)$ で発散する。

注意 解答例の途中で飛ばしている $\frac{o(x^2)}{x^2+y^2} = o(1)$ は次のようにして説明できます。

$$\left|\frac{o(x^2)}{x^2+y^2}\right| = \frac{x^2}{x^2+y^2}\frac{o(x^2)}{x^2} \leq o(1).$$

$\frac{o(y^2)}{x^2+y^2} = o(1)$ も同じで、$\frac{o(xy)}{x^2+y^2} = o(1)$ も

$$\left|\frac{xy}{x^2+y^2}\right| \leq \frac{1}{2}$$

から示されます。

ただ、よく考えてみると $f(x, y)$ を $\frac{2xy}{x^2+y^2}$ で近似できる段階で極限が存在しないと予想がつくので次のように示すこともできます。

(2) の別解 極限は存在しないことを示す。$y = 0$ として $x \to 0$ とすることを考えると、

$$f(x, 0) = \frac{0}{e^x - 1 - x} = 0.$$

$y = x$ として $x \to 0$ とすることを考えると、

$$f(x, x) = \frac{\sin(x^2)}{2(e^x - 1 - x)} = \frac{1}{2}\frac{\sin(x^2)}{x^2}\frac{x^2}{e^x - 1 - x} \to \frac{1}{2}\frac{1}{\frac{1}{2}} = 1.$$

よって $f(x, y)$ の $(x, y) \to (0, 0)$ での極限は存在しない。