2023 年度京都大学微分積分学（演義）B
第 3 回問題解答例

中安淳

2023 年 10 月 31 日

問題 11

次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-x-y^2+y}{x-y}$.

(2) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

(3) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy(x+y)}{x^2+xy+y^2}$.

解答

(1) 約分できて

$$\frac{x^2-x-y^2+y}{x-y} = x+y-1$$

で $x+y-1$ は原点でも連続でその値は -1 なので、問題の極限は -1 である。

(2) 極座標 $(x,y)=(r\cos\theta, r\sin\theta)$ により計算すると、

$$\frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \cos\theta+\sin\theta.$$

この値（の $r\to 0$ での極限）は θ によって変わってしまう、つまり $\theta=0$ だと 1 だが $\theta=-\pi$ だと -1 なので、問題の極限は存在しない。

(3) 極座標 $(x,y)=(r\cos\theta, r\sin\theta)$ によって各 θ に対して

$$\frac{xy(x+y)}{x^2+xy+y^2} = \frac{\cos\theta\sin\theta(\cos\theta+\sin\theta)}{1+\cos\theta\sin\theta}r \to 0 \quad (r\to 0).$$

よって極限値は 0 と予想でき、

$$\begin{aligned}\left|\frac{xy(x+y)}{x^2+xy+y^2}-0\right| &= \frac{|\cos\theta||\sin\theta||\cos\theta+\sin\theta|}{1+\cos\theta\sin\theta}r \\ &\le \frac{2}{1+\frac{1}{2}\sin 2\theta}r \le 4r \to 0 \quad (r\to 0).\end{aligned}$$

よって極限は 0 である。

問題 12

次の集合 E の境界 ∂E を求めて、E は開集合かどうか閉集合かどうかそして有界かどうかそれぞれ答えよ（答えのみでよい）。

(1) $E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\le 1\}$.

(2) $E=\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$.

(3) $E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x>0, y>0, x+y=1\}$.

(4) $E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^3+y^3-3xy=0\}$.

図形としては (1) は円の周と内部、(2) は平面から 1 点をくりぬいたもの、(3) は線分の端点を除いたもの、(4) はデカルトの正葉線（教科書第 6 章 4 節例 8）です。

解答

(1) 境界は $\partial E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=1\}$ で、E は開集合でないが閉集合である。また、E は有界である。

(2) 境界は $\partial E=\{(0,0)\}$ で、E は開集合だが閉集合でない。また、E は有界でない。

(3) 境界は $\partial E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\ge 0, y\ge 0, x+y=1\}$ で、E は開集合でも閉集合でもない。また、E は有界である。

(4) 境界は $\partial E=E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^3+y^3-3xy=0\}$ で、E は開集合でないが閉集合である。また、E は有界でない。

注意　開集合・閉集合をちゃんと判定しようとすると他はまだしも (4) がとても難しいですが、開集合・閉集合は連続関数の逆像として得られる（教科書第 6 章 2 節問 11）ことからわかります。つまり連続関数 $f(x,y)=x^3+y^3-3xy$ に対して、閉区間の逆像 $f^{-1}(\{0\})=E$ は閉集合です。