# 2023 年度京都大学微分積分学（演義）B
# 第 2 回宿題解答例

中安淳

2023 年 10 月 17 日

**宿題 9**

次の級数は絶対収束するか条件収束するか発散するか答えよ。

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n.$

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \sin^2 \frac{1}{n}.$

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \sin \frac{1}{n}.$

### 解答

(1) この級数は発散する。なぜなら収束したとすると、数列 $\{(-1)^n\}$ は 0 に収束しなければならないが、この数列は発散するからである。

(2) この級数は絶対収束する。$n = 1, 2, 3, \cdots$ で $0 < \frac{1}{n} \leq 1 < \frac{\pi}{2}$ より、対応する正項級数は $\sum_{n=1}^{\infty} \sin^2 \frac{1}{n}$ となる。ここで、

$$\frac{\sin^2 \frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}} \to 1$$

より比較判定法から、$\sum_{n=1}^{\infty} \sin^2 \frac{1}{n}$ と $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ の収束・発散は一致する。後者の級数は収束するので問題の級数は絶対収束することがわかる。

(3) この級数は条件収束する。まず、$\sin x$ は $x \in [0, 1]$ で単調増加より、$\sin \frac{1}{n}$ は $n$ が大きくなると単調減少し、0 に収束する。よって、ライプニッツの定理（教科書第 5 章定理 3）より、交代級数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \sin \frac{1}{n}$ は収束することがわかる。一方で絶対収束はしないことを示す。対応する正項級数は $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n}$ である。(2) と同様に比較判定法より、$\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n}$ と $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ の収束・発散は一致する。後者の級数は発散するので左辺の級数も発散し、問題の級数は条件収束であることがわかる。

**宿題 10**

漸化式 $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, $F_1 = F_2 = 1$ で定まるフィボナッチ数列 $(F_n)$ について、（正項）級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{F_n}$ は収束することを示せ。

この数列は一般項が計算できます。

**解答**　漸化式を解くと、

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n - \beta^n), \quad \alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

となる（詳細省略）。$a_n = \frac{1}{F_n}$ とおいて計算すると $-1 < \beta < 0 < 1 < \alpha$ に注意して、

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{F_n}{F_{n+1}} = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}} \to \frac{1}{\alpha} < 1.$$

よって、ダランベールの判定法より正項級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{F_n}$ は収束する。

ちなみに以下のように漸化式から大雑把な評価をすることで一般項を求めることなく収束を示すこともできます。

**別解**　$F_1 \geq 0$, $F_2 \geq 0$ で帰納的に $F_n \geq 0$ がわかる。よって、$F_{n+2} \geq F_{n+1}$ なので、$F_2 = F_1$ より $F_{n+1} \geq F_n$ である。したがって $F_{n+2} \geq 2F_n$ が成り立つ。ここから $k = 1, 2, 3, \cdots$ に対して $F_{2k} \geq 2^{k-1}F_2 = 2^{k-1}$, $F_{2k-1} \geq 2^{k-1}F_1 = 2^{k-1}$、つまり $F_n \geq \sqrt{2}^{n-2}$ を得る。正項級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2}^{n-2}}$ は収束するので、比較判定法より、$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{F_n}$ も収束する。