2023 年度京都大学微分積分学（演義）B
第 2 回問題解答例

中安淳

2023 年 10 月 17 日

問題 $\boxed{7}$

次の正項級数はいずれも収束することを示せ。

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$.

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$.

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$.

(4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}$.

解答

(1) $a_n = \frac{n^2}{2^n}$ とおくと、

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}\frac{2^n}{n^2} = \frac{(1+n^{-1})^2}{2} \to \frac{1}{2} < 1 \quad (n\to\infty).$$

よってダランベールの判定法より、この正項級数は収束する。

(2) $a_n = \frac{2^n}{n!}$ とおくと、

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}\frac{n!}{2^n} = \frac{2}{n+1} \to 0 < 1 \quad (n\to\infty).$$

よってダランベールの判定法より、この正項級数は収束する。

(3) $a_n = \frac{n!}{n^n}$ とおくと、

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\frac{n^n}{n!} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n} \to e^{-1} < 1 \quad (n\to\infty).$$

よってダランベールの判定法より、この正項級数は収束する。

(4) $a_n = \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}$ とおくと、

$$\sqrt[n]{a_n} = \left(1-\frac{1}{n}\right)^n \to e^{-1} < 1 \quad (n\to\infty).$$

よってコーシーの判定法より、この正項級数は収束する。

問題 $\boxed{8}$

次の正項級数は収束するか発散するか答えよ。

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1-\cos\frac{1}{n}\right)$.

(2) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\log n}$.

(1) は、漸近展開 $\cos x = 1-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)$ より、級数 $\sum_n \frac{1}{n^2}$ に帰着させます。(2) は多分どうしようもないので広義積分に帰着させましょう。

解答

(1) 計算すると

$$\frac{\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n^2}} = 2n^2\sin^2\frac{1}{2n} \to \frac{1}{2}$$

なので、比較判定法（教科書第 5 章定理 1）より、問題の級数と級数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ の収束・発散は一致する。そして、教科書第 4 章定理 8 の系より級数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ は収束なので、問題の級数は収束する。

(2) 関数 $f(x) = \frac{1}{(x+1)\log(x+1)}$ は $[1,\infty)$ 上で正値かつ単調減少なので、積分判定法（教科書第 4 章定理 8）より、級数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\log n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\log(n+1)}$ と広義積分 $\int_1^{\infty}\frac{1}{(x+1)\log(x+1)}dx = \int_2^{\infty}\frac{1}{x\log x}dx$ の収束・発散は一致する。そこで極限

$$\lim_{t\to\infty}\int_2^t \frac{1}{x\log x}dx$$

の収束・発散を調べればよい。定積分の部分を $y=\log x$ と置換すると、$x=e^y$、$\frac{dx}{dy}=e^y$ なので、

$$\begin{aligned}\int_2^t \frac{1}{x\log x}dx &= \int_{\log 2}^{\log t}\frac{e^y}{e^y y}dy = \int_{\log 2}^{\log t}\frac{1}{y}dy \\ &= [\log y]_{\log 2}^{\log t} = \log(\log t) - \log(\log 2).\end{aligned}$$

$t\to\infty$ とすると、これは無限大に発散するので、問題の級数は発散する。