2023 年度京都大学微分積分学（演義）B
第 1 回宿題解答例

中安淳

2023 年 10 月 3 日

宿題 $\boxed{5}$

十進数の小数

$$0.d_1d_2d_3\cdots \quad (d_1, d_2, d_3, \cdots = 0, \cdots, 9)$$

の値を級数

$$\frac{d_1}{10} + \frac{d_2}{100} + \frac{d_3}{1000} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n}{10^n}$$

の和として定義するとこれは 0 以上 1 以下の実数に収束することが知られている（証明不要）。ここで、循環小数

$$0.d_1\cdots d_K d_1 \cdots d_K d_1 \cdots d_K \cdots$$

は有理数になることを示せ。

解答　循環する部分 $d_1\cdots d_K$ が表す整数を s とおく、つまり

$$s = d_1 10^{K-1} + \cdots + d_K$$

とすると、問題文の循環小数は級数

$$\frac{s}{10^K} + \frac{s}{10^{2K}} + \frac{s}{10^{3K}} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s}{10^{nK}}$$

と考えることができる。これは公比が $\frac{1}{10^K}$ の等比級数なので、和は収束し

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{s}{10^{nK}} = s\frac{\frac{1}{10^K}}{1-\frac{1}{10^K}} = \frac{s}{10^K - 1}$$

でこれは有理数である。

注意　正確には循環小数の小数点以下 K の倍数桁以外の中途半端な桁で止めた場合も考えなければなりませんが、数列 $\{S_n\}$ が収束するならば部分列 $\{S_{Kn}\}$ も収束するという事実があるので、上のような説明でも大丈夫です。

宿題 $\boxed{6}$

一辺の長さが 1 の正三角形を A_0 とする。A_0 の各辺の真ん中にその辺の長さの 3 分の 1 の正三角形を A_0 の外側に付けて得られる多角形を A_1 とする。同様にして A_1 の各辺の真ん中にその辺の長さの 3 分の 1 の正三角形を A_1 の外側に付けて得られる多角形を A_2 とする。この操作を繰り返して、図形（の列）$A_0, A_1, A_2, A_3, \cdots$ を得る時、A_n の周の長さ L_n の $n \to \infty$ での極限と面積 S_n の $n \to \infty$ での極限を求めよ。
ヒント：図形 A_n の極限はコッホ雪片と呼ばれるので、図形的イメージはそれを参考にする。

解答　一回の操作で 1 つの辺が 4 つになり、多角形 A_n の各辺の長さは $\frac{1}{3^n}$ であることに注意する。

周の長さについて、A_n の辺の個数は $3\cdot 4^n$ なので、

$$L_n = 3\left(\frac{4}{3}\right)^n \to +\infty.$$

よって答えは正の無限大に発散である。

面積について、$S_0 = \frac{\sqrt{3}}{4}$ であり、$n=1$ では A_0 を $\frac{1}{3}$ 倍にしたものが 3 つ増えるので、

$$S_1 = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot 3.$$

さらに $n=2$ では一辺の長さが $\frac{1}{3^2}$ の正三角形が A_1 の辺の個数の $3\cdot 4$ 個増えるので、

$$S_2 = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{1}{9}\cdot 3 + \frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{1}{9^2}\cdot 3\cdot 4.$$

これを繰り返すことで、

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{\sqrt{3}}{4}\left(1 + \frac{1}{9}\cdot 3 + \frac{1}{9^2}\cdot 3\cdot 4 + \cdots + \frac{1}{9^n}\cdot 3\cdot 4^{n-1}\right) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4}\left(1 + 3\sum_{k=1}^{n}\frac{4^{k-1}}{9^k}\right) = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(1 + \frac{1}{3}\frac{1-\left(\frac{4}{9}\right)^n}{1-\frac{4}{9}}\right) \\ &\to \frac{\sqrt{3}}{4}\left(1 + \frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{4}{9}}\right) = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(1+\frac{3}{5}\right) = \frac{2\sqrt{3}}{5}. \end{aligned}$$

よって答えは $\frac{2\sqrt{3}}{5}$ である。