# 2023年度京都大学微分積分学（演義）B
# 第1回問題解答例

中安淳

2023年10月3日

**問題 1**

(1) $f(x)$ を有界でない区間 $[a, \infty)$ 上の連続関数とする（$a$ は実数）。このとき広義積分 $\displaystyle\int_a^\infty f(x)dx$ が収束することの定義を答えよ。
(2) 広義積分 $\displaystyle\int_0^\infty e^x dx$ は収束するかどうか答えよ。
(3) 広義積分 $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x} dx$ は収束するかどうか答えよ。
(4) 広義積分 $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx$ は収束するかどうか答えよ。
(5) 広義積分 $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x} dx$ は収束するかどうか答えよ。

**解答**

(1) 極限 $\displaystyle\lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx$ が収束すること。
(2) $b \to \infty$ において、

$$\int_0^b e^x dx = [e^x]_0^b = e^b - 1 \to +\infty.$$

よって広義積分 $\int_0^\infty e^x dx$ は収束しない（発散する）。
(3) $b \to \infty$ において、

$$\int_0^b e^{-x} dx = [-e^{-x}]_0^b = -e^{-b} + 1 \to 1.$$

よって広義積分 $\int_0^\infty e^{-x} dx$ は収束する。
(4) $b \to \infty$ において、

$$\int_1^b \frac{1}{x^2} dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^b = -\frac{1}{b} + 1 \to 1.$$

よって広義積分 $\int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx$ は収束する。
(5) $b \to \infty$ において、

$$\int_1^b \frac{1}{x} dx = [\log x]_1^b = \log b \to +\infty.$$

よって広義積分 $\int_1^\infty \frac{1}{x} dx$ は収束しない（発散する）。

**問題 2**

次の級数の和を求めよ。

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n(n+1)(n+2)}.$$

計算できる数列の和の公式

$$\sum_{k=1}(b_k - b_{k+1}) = b_1 - b_{n+1}$$

を使います。

**解答**　次の変形

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)$$

により、部分和は

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)} &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)\end{aligned}$$

となる。これは $n \to \infty$ とすると $\frac{1}{4}$ に収束するので、

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{4}$$

である。

**問題 3**

各項 $a_n$ が 0 でない数列 $\{a_n\}$ に対して、二つの級数 $\sum a_n$ と $\sum a_n^{-1}$ のうち片方は発散することを示せ。

**解答**　級数 $\sum a_n$ と $\sum a_n^{-1}$ がともに収束するとして矛盾を導く。このとき、教科書第1章2節定理7の系より、極限を取ると $a_n \to 0$ かつ $a_n^{-1} \to 0$ となる必要がある。よって積 $a_n a_n^{-1}$ も 0 に収束するが、$a_n a_n^{-1}$ は常に 1 なので矛盾する。したがって背理法により級数 $\sum a_n$ と $\sum a_n^{-1}$ のうち片方は発散する。

問題 $\boxed{4}$

$X$ は 0 以上 100 以下の実数を、$Y$ は 0 以上 30 以下の実数をそれぞれ動くとして次の問いに答えよ。

(1) 次の二つの集合を $XY$ 平面に図示せよ。

$$\text{講} = \{(X,Y) \mid X \geq 0.8X + Y\},$$
$$\text{演} = \{(X,Y) \mid X \leq 0.8X + Y\}.$$

(2) 次の集合を $XY$ 平面に図示せよ。

$$\text{合} = \{(X,Y) \mid \max\{X, 0.8X + Y\} \geq 60\}.$$

ただし、$\max\{a,b\}$ で実数 $a$ と $b$ の大きい方を表す。

**解答**

(1) $X = 0.8X + Y$ を考えると、$Y = \frac{2}{10}X$ より、これは $(0,0)$ と $(100,20)$ を結ぶ線分である。よって 講 は $(0,0)$ と $(100,0)$ と $(100,20)$ を結んで得られる三角形の周と内部で、演 は $(0,0)$ と $(0,30)$ と $(100,30)$ と $(100,20)$ を結んで得られる四角形の周と内部である（図は省略）。

(2) 場合分けすることにより

$$\text{合} = \{(X,Y) \in \text{講} \mid X \geq 60\} \cup \{(X,Y) \in \text{演} \mid 0.8X + Y \geq 60\}.$$

ここで、$\{(X,Y) \in \text{講} \mid X = 60\}$ は $(60,0)$ と $(60,12)$ を結ぶ線分で、$\{(X,Y) \in \text{演} \mid 0.8X + Y = 60\}$ は $(60,12)$ と $(37.5,30)$ を結ぶ線分なので、合 は $(60,0)$ と $(60,12)$ と $(37.5,30)$ と $(100,30)$ と $(100,0)$ を結んで得られる五角形の周と内部である（図は省略）。