2023 年度京都大学微分積分学（演義）B
補充問題

中安淳

2024 年 1 月 16 日

補充問題 $\boxed{31}$

$n = 1, 2, 3, \cdots$ に対して区間 $[1, e]$ 上の関数

$$f_n(x) = \frac{n}{\sin x + nx}$$

を定義する。

(1) $x \in [1, e]$ を固定するごとに数列 $\{f_n(x)\}$ は $n \to \infty$ である数 $f(x)$ に収束する、つまり関数列 $\{f_n(x)\}$ は関数 $f(x)$ に各点収束することを示し、極限関数 $f(x)$ を求めよ。

(2) 関数列 $\{f_n(x)\}$ は $n \to \infty$ で (1) の関数 $f(x)$ に一様収束することを示せ。

(3) 次の極限を計算せよ。

$$\lim_{n\to\infty} \int_1^e f_n(x)dx.$$

補充問題 $\boxed{32}$

次の整級数の収束半径を求めよ。

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n.$

(2) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n.$

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} x^n.$

(4) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} B\left(n + \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2}\right) x^n.$

ただし、$B(p, q)$ はベータ関数である。

補充問題 $\boxed{33}$

$\mathbb{R}$ 上で定義された次の関数 f は C^∞ 級であることを示せ。

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & (x \neq 0), \\ 1 & (x = 0). \end{cases}$$

ヒント：整級数。

補充問題 $\boxed{34}$

次の級数の和を計算せよ。

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2(n+3)}{2^n(n+1)(n+2)}.$$

ヒント：整級数と部分分数展開。