2023 年度京都大学微分積分学（演義）B
第 4 回問題と宿題 *

中安淳

2023 年 11 月 14 日

問題 $\boxed{15}$

原点を中心とする半径 1 の円の内部 $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$ で二変数関数

$$f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

は全微分可能であることを示し、そのグラフ $z = f(x, y)$ 上の点 $(a, b, f(a, b))$ $((a, b) \in D)$ での接平面の方程式を求めよ。

問題 $\boxed{16}$

$f(x, y), g(x, y)$ を二変数 C^1 級関数、$\varphi(t)$ を一変数 C^1 級関数とするとき、全微分に関する次の式が成り立つことを示せ。

$$d(fg) = gdf + fdg, \quad d(\varphi \circ f) = (\varphi' \circ f)df.$$

ただし、一変数関数 $\varphi(t)$ に対して $\varphi \circ f$ は合成関数 $(\varphi \circ f)(x, y) = \varphi(f(x, y))$ を表す。

宿題 $\boxed{17}$

二変数関数

$$f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{y}} e^{-\frac{x^2}{4y}} \quad (x \in \mathbb{R}, y > 0)$$

は偏導関数に関する式 $f_{xx} = f_y$ を満たすことを示せ。

宿題 $\boxed{18}$

以下の問いに答えよ。

(1) 原点以外の平面の点をそこから最も近い単位円（原点を中心とする半径 1 の円）周上の点に写す変換は（単位円への）射影と呼ばれる。この変換のヤコビアンは常に 0 であることを示せ。

(2) 原点以外の平面の点を原点からの向きを保ったまま原点からの距離が逆数になるようにして平面上の点に写す変換は（単位円に関する）反転と呼ばれる。この変換のヤコビアンを求めよ（点の座標によることに注意）。

---

* 締め切り：2023 年 11 月 21 日