2023 年度同志社大学線形代数 レポート問題解答例

中安淳

2023 年 8 月 10 日

レポート $\boxed{1}$

次の正方行列の逆行列を求めよ。

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & 4 \end{bmatrix}.$$

逆行列を計算するには単位行列を並べて基本変形するのでした。

解答　次の行列を行基本変形する。

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

第 1 行と第 2 行を入れ替えて、

$$\begin{bmatrix} -1 & 4 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

第 1 行を -1 倍して、

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

第 2 行から第 1 行の 4 倍を引き、第 3 行に第 1 行を足して、

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 15 & -5 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & -5 & 5 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

第 2 行と第 3 行を入れ替えて、

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 5 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 15 & -5 & 1 & 4 & 0 \end{bmatrix}.$$

第 2 行を -5 で割って、

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & 15 & -5 & 1 & 4 & 0 \end{bmatrix}.$$

第 1 行に第 2 行の 4 倍を足し、第 3 行から第 2 行の 15 倍を引いて、

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 & -\frac{1}{5} & -\frac{4}{5} \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 10 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

第 3 行を 10 で割って、

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 & -\frac{1}{5} & -\frac{4}{5} \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{10} & \frac{1}{10} & \frac{3}{10} \end{bmatrix}.$$

第 1 行に第 3 行の 3 倍を足し、第 2 行に第 3 行を足して、

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{10} & \frac{1}{10} & \frac{1}{10} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{10} & \frac{3}{10} & \frac{1}{10} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{10} & \frac{1}{10} & \frac{3}{10} \end{bmatrix}.$$

よって答えの逆行列は

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{10} & \frac{1}{10} & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{10} & \frac{3}{10} & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{10} & \frac{1}{10} & \frac{3}{10} \end{bmatrix}$$

である。

レポート $\boxed{2}$

θ を実数として、次の行列式の値を求めよ。

$$\begin{vmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & -\cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta & -\sin\theta & -\cos\theta \\ \cos\theta & \sin\theta & \cos\theta & -\sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta & \sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix}.$$

工夫して基本変形しましょう。

解答　与えられた行列式を D とおくと、第 1 行に第 3 行を足し、第 2 行に第 4 行を足して、

$$D = \begin{vmatrix} 2\cos\theta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\cos\theta & 0 & 0 \\ \cos\theta & \sin\theta & \cos\theta & -\sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta & \sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix}.$$

よって、次数を減らすことができて、

$$D = 2\cos\theta \cdot 2\cos\theta \begin{vmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix}.$$

あとはサラスの方法より、

$$D = 4\cos^2\theta(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = 4\cos^2\theta.$$

よって答えは $4\cos^2\theta$ である。

レポート $\boxed{3}$

次の正方行列 A について、以下の問題に答えよ。

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & -3 \\ -4 & 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

(1) 同次連立 1 次方程式 $A\vec{x} = \vec{0}$ の解空間

$$W_1 = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid A\vec{x} = \vec{0}\}$$

の次元 $\dim(W_1)$ を求めよ。

(2) (1) の部分空間 W_1 を使って定義される

$$W_2 = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid A\vec{x} \in W_1\}$$

も $\mathbb{R}^3$ の部分空間である（証明不要）。その次元 $\dim(W_2)$ を求めよ。

解答

(1) 同次連立 1 次方程式 $A\vec{x} = \vec{0}$ を解く。そのために係数行列 A を行基本変形する。A の第 1 行を -1 倍して、

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & -3 \\ -4 & 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

第 2 行から第 1 行の 3 倍を引き、第 3 行に第 1 行の 4 倍を足して、

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

第 1 行と第 3 行に第 2 行を足して、

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

よって、$A\vec{x} = \vec{0}$ は $\vec{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ とすると次と同値である。

$$x - z = 0, \quad y = 0.$$

z を任意定数 c と置き換えることで、

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \\ 0 \\ c \end{bmatrix} = c\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

以上より W_1 は 1 個のベクトル $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ が生成する部分空間なので、その次元 $\dim(W_1)$ は 1 である。

(2) (1) より、

$$W_1 = \left\{ c\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mid c \in \mathbb{R} \right\}$$

であるので、

$$W_2 = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid A\vec{x} = c\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, c \in \mathbb{R} \right\}$$

となる。そこで $c \in \mathbb{R}$ に対して連立 1 次方程式 $A\vec{x} = c\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ を解くことを考える。拡大係数行列は

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & c \\ 3 & -2 & -3 & 0 \\ -4 & 3 & 4 & c \end{bmatrix}.$$

第 1 行を -1 倍して、

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -c \\ 3 & -2 & -3 & 0 \\ -4 & 3 & 4 & c \end{bmatrix}.$$

第 2 行から第 1 行の 3 倍を引き、第 3 行に第 1 行の 4 倍を足して、

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -c \\ 0 & 1 & 0 & 3c \\ 0 & -1 & 0 & -3c \end{bmatrix}.$$

第 1 行と第 3 行に第 2 行を足して、

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2c \\ 0 & 1 & 0 & 3c \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

よって、$A\vec{x} = c\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ は $\vec{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ とすると次と同値である。

$$x - z = 2c, \quad y = 3c.$$

z を任意定数 d と置き換えることで、

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2c + d \\ 3c \\ d \end{bmatrix} = c\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} + d\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

したがって、

$$W_2 = \left\{ c\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} + d\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mid c, d \in \mathbb{R} \right\}$$

であり、その次元 $\dim(W_2)$ は 2 である。

注意　実は W_2 は同次連立 1 次方程式 $A^2\vec{x} = \vec{0}$ の解空間になっているので、A^2 を基本変形をして次元定理を用いれば次元は簡単に計算できます。この問題は線形代数の発展項目であるジョルダン標準形の理論と関係しています。

レポート $\boxed{4}$

$n = 1, 2, 3, \cdots$ として、次の正方行列の n 乗を求めよ。

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

解答　問題文の対称行列を A とおいて、その対角化をする。固有多項式 $\det(A - \lambda E)$ は

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda E) &= \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} \\ &= (-\lambda)^3 + 1 + 1 - (-\lambda) - (-\lambda) - (-\lambda) \\ &= -\lambda^3 + 3\lambda + 2. \end{aligned}$$

よって固有方程式 $\det(A - \lambda E) = 0$ は

$$\lambda^3 - 3\lambda - 2 = 0.$$

ここで $\lambda = -1$ はこの方程式を満たすので、

$$\lambda^3 - 3\lambda - 2 = (\lambda + 1)(\lambda^2 - \lambda - 2) = (\lambda + 1)^2(\lambda - 2)$$

より、固有方程式の解つまり固有値は $\lambda = -1, 2$ であり、$\lambda = -1$ が 2 重で $\lambda = 2$ が 1 重である。固有値 $\lambda = 2$ に対して、

$$A - \lambda E = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

であり、簡約化すると

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

なので、同次連立 1 次方程式 $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$ の解は

$$\vec{x} = c\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

で、固有ベクトルとして例えば $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ が取れる。固有値 $\lambda = -1$ に対して、

$$A - \lambda E = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

であり、簡約化すると

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

なので、同次連立 1 次方程式 $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$ の解は

$$\vec{x} = c\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + d\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

で、固有ベクトルとして例えば $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ が取れる。したがって以上より A は

$$A = P\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}P^{-1}, \quad P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

と対角化できる。その n 乗は

$$A^n = P\begin{bmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{bmatrix}P^{-1}$$

であり、P の逆行列を計算すると

$$
\begin{aligned}
\begin{bmatrix} P & E \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&\to \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&\to \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\
&\to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \\
&\to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \\
&\to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

より、

$$
P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}
$$

なので、

$$
\begin{aligned}
A^n &= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2^n & -(-1)^n & -(-1)^n \\ 2^n & (-1)^n & 0 \\ 2^n & 0 & (-1)^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2^n + 2(-1)^n & 2^n - (-1)^n & 2^n - (-1)^n \\ 2^n - (-1)^n & 2^n + 2(-1)^n & 2^n - (-1)^n \\ 2^n - (-1)^n & 2^n - (-1)^n & 2^n + 2(-1)^n \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

である。

注意　第 14 回授業で説明したように固有ベクトルをシュミットの直交化すると変換行列 P が直交行列になり逆行列の計算が転置をとるだけで済むようになります（詳細省略）。