2023 年度同志社大学線形代数 期末試験問題解答例

中安淳

2023 年 7 月 27 日

問題 $\boxed{1}$

次の連立１次方程式の解をすべて求めよ。

(1) $\begin{cases} 2x+3y-z=-3, \\ -x+2y+2z=1, \\ x+y-z=-2. \end{cases}$

(2) $\begin{cases} 2y+4z+2w=2, \\ -x+y+3z+2w=2, \\ x+2y+3z+w=1, \\ -2x-y+w=1. \end{cases}$

解答

(1) 拡大係数行列は

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & -3 \\ -1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

これを簡約化すると、第 1 行と第 3 行を入れ替えて、

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & -3 \end{bmatrix}.$$

第 2 行に第 1 行を足し、第 3 行から第 1 行の 2 倍を引いて、

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

第 2 行と第 3 行を入れ替えて、

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

第 1 行から第 2 行を引き、第 3 行から第 2 行の 3 倍を引いて、

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{bmatrix}.$$

第 3 行を -2 で割って、

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

第 1 行に第 3 行の 2 倍を足し、第 2 行から第 3 行を引いて、

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

これは簡約行列であり、対応する連立１次方程式は

$$\begin{cases} x=1, \\ y=-1, \\ z=2. \end{cases}$$

したがって答えは $(x,y,z)=(1,-1,2)$ である。

(2) 拡大係数行列は

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

これを簡約化すると、第 1 行と第 3 行を入れ替えて、

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

第 2 行に第 1 行を足し、第 4 行に第 1 行の 2 倍を足して、

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 6 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 6 & 3 & 3 \end{bmatrix}.$$

第 3 行を 3 で割って、

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 6 & 3 & 3 \end{bmatrix}.$$

第 1 行から第 2 行の 2 倍を引き、第 3 行から第 2 行の 2 倍を引き、第 4 行から第 2 行の 3 倍を引いて、

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

これは簡約行列であり、対応する連立 1 次方程式は

$$\begin{cases} x - z - w = -1, \\ y + 2z + w = 1. \end{cases}$$

ここで $z = a,\ w = b$ とおくことで、答えは

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 + a + b \\ 1 - 2a - b \\ a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + a \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

である。ただし、a, b は任意のスカラーである。

問題 $\boxed{2}$

次の行列式の値を求めよ。

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \\ 7 & 6 & 4 \end{vmatrix}$.

(2) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & -4 & 2 \\ 1 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 4 & 5 \end{vmatrix}$.

解答

(1) 行列式の定義に従って計算すると問題文の行列式 D はサラスの方法より、

$$\begin{aligned} D &= 1 \cdot 1 \cdot 4 + 0 \cdot 5 \cdot 7 + 3 \cdot 2 \cdot 6 - 1 \cdot 5 \cdot 6 - 0 \cdot 2 \cdot 4 - 3 \cdot 1 \cdot 7 \\ &= 4 + 0 + 36 - 30 - 0 - 21 \\ &= -11. \end{aligned}$$

よって答えは -11 である。

(2) 基本変形すると問題文の行列式 D は第 1 行と第 2 行を入れ替えて、

$$D = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 & 0 \\ 3 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 4 & 5 \end{vmatrix}.$$

第 2 行から第 1 行の 3 倍を引き、第 4 行から第 1 行の 2 倍を引いて、

$$D = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & -19 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & -6 & 5 \end{vmatrix}.$$

よって第 1 列は第 1 行以外の成分がすべて 0 なので、

$$D = -\begin{vmatrix} 1 & -19 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 4 & -6 & 5 \end{vmatrix}.$$

第 2 行に第 1 行を足し、第 3 行から第 1 行の 4 倍を引いて、

$$D = -\begin{vmatrix} 1 & -19 & 2 \\ 0 & -16 & 2 \\ 0 & 70 & -3 \end{vmatrix}.$$

よって第 1 列は第 1 行以外の成分がすべて 0 なので、

$$D = -\begin{vmatrix} -16 & 2 \\ 70 & -3 \end{vmatrix}.$$

あとはサラスの方法で

$$D = -(16 \cdot 3 - 2 \cdot 70) = 140 - 48 = 92.$$

よって答えは 92 である。

問題 $\boxed{3}$

次の集合は数ベクトル空間 $\mathbb{R}^4$ の部分空間である（証明不要）。その次元を求めよ。

(1) $$\left\{ k_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + k_3 \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} + k_4 \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \mid k_1, k_2, k_3, k_4 \in \mathbb{R} \right\}.$$

(2) $$\left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid x - 2y + z - w = 0,\ -2x + 4y + 2z - 10w = 0,\ -3x + 6y - 4z + 6w = 0,\ y = 0 \right\}.$$

解答

(1) ベクトルを並べて得られる行列

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

の階数を計算する。第 1 行と第 2 行を入れ替えて、

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{bmatrix}.$$

第 3 行と第 4 行から第 1 行を引いて、

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

第 2 行と第 3 行を入れ替えて、

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

第 1 行から第 2 行を引き、第 3 行から第 2 行の 3 倍を引き、第 4 行から第 2 行の 2 倍を引いて、

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

第 1 行から第 3 行の 4 倍を引き、第 2 行に第 3 行を足し、第 4 行から第 3 行を引いて、

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

これは簡約行列であり、その階数は 3 である。したがって答えの次元も 3 である。

(2) 係数行列

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ -2 & 4 & 2 & -10 \\ -3 & 6 & -4 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

の階数を計算する。第 2 行に第 1 行の 2 倍を足し、第 3 行に第 1 行の 3 倍を足して、

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -12 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

第 2 行と第 4 行を入れ替えて、

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & -12 \end{bmatrix}.$$

第 1 行に第 2 行の 2 倍を足して、

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & -12 \end{bmatrix}.$$

第 3 行を -1 倍して、

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & -12 \end{bmatrix}.$$

第 1 行から第 3 行を引き、第 4 行から第 3 行の 4 倍を引いて、

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

これは簡約行列であり、その階数は 3 である。したがって答えの次元は次元定理により $4 - 3$ で 1 である。

注意　ちなみにそれぞれの部分空間の基底の例を求めると、(1) は

$$\begin{bmatrix}0\\1\\1\\1\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}3\\1\\2\\3\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}-2\\3\\2\\2\end{bmatrix}$$

で、(2) は

$$\begin{bmatrix}-2\\0\\3\\1\end{bmatrix}$$

などとなります。

問題 $\boxed{4}$

次の正方行列の固有値と固有ベクトルを求めよ。

$$\begin{bmatrix}2&1&0\\1&1&1\\0&1&2\end{bmatrix}.$$

解答　問題文の行列を A とおくと固有多項式はサラスの方法より、

$$\begin{aligned}\det(A-\lambda E) &= \begin{vmatrix}2-\lambda&1&0\\1&1-\lambda&1\\0&1&2-\lambda\end{vmatrix}\\ &= (2-\lambda)^2(1-\lambda)-(2-\lambda)-(2-\lambda)\\ &= (2-\lambda)(\lambda^2-3\lambda+2-1-1)\\ &= (2-\lambda)\lambda(\lambda-3)\end{aligned}$$

よって固有値は固有方程式 $\det(A-\lambda E)=0$ を解いて、$\lambda=0,2,3$ でありすべて 1 重である。固有値 $\lambda=0$ に対して、

$$A-\lambda E=\begin{bmatrix}2&1&0\\1&1&1\\0&1&2\end{bmatrix}$$

であり、固有ベクトルはこの行列をかけると零ベクトルになるものなので、例えば

$$\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix}$$

がある。固有値 $\lambda=2$ に対して、

$$A-\lambda E=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&-1&1\\0&1&0\end{bmatrix}$$

であり、固有ベクトルの例として

$$\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$$

がある。固有値 $\lambda=3$ に対して、

$$A-\lambda E=\begin{bmatrix}-1&1&0\\1&-2&1\\0&1&-1\end{bmatrix}$$

であり、固有ベクトルの例として

$$\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$$

がある。以上より答えの固有値と固有ベクトルは、固有値 0 に対して固有ベクトル $\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix}$、固有値 2 に対して固有ベクトル $\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$、固有値 3 に対して固有ベクトル $\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$ である。

注意　固有ベクトルはスカラー倍してもよいです。