2023 年度同志社大学線形代数 追試験問題解答例

中安淳

2023 年 8 月 9 日

問題 $\boxed{1}$

次の連立１次方程式の解をすべて求めよ。

(1) $\begin{cases} x + 3z = 7, \\ 2x + y + 5z = 11, \\ 7x + 6y + 4z = 9. \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x - 2y + z - w = 2, \\ -2x + 4y + 2z - 10w = 0, \\ -3x + 6y - 4z + 6w = -7. \end{cases}$

解答

(1) 拡大係数行列は

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 7 \\ 2 & 1 & 5 & 11 \\ 7 & 6 & 4 & 9 \end{bmatrix}.$$

これを簡約化すると、第 2 行に第 1 行の 2 倍を引き、第 3 行から第 1 行の 7 倍を引いて、

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 6 & -17 & -40 \end{bmatrix}.$$

第 3 行から第 2 行の 6 倍を引いて、

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -11 & -22 \end{bmatrix}.$$

第 3 行を -11 で割って、

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

第 1 行から第 3 行の 3 倍を引き、第 2 行に第 3 行を足して、

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

これは簡約行列であり、対応する連立１次方程式は

$$\begin{cases} x = 1, \\ y = -1, \\ z = 2. \end{cases}$$

したがって答えは $(x, y, z) = (1, -1, 2)$ である。

(2) 拡大係数行列は

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 & 2 \\ -2 & 4 & 2 & -10 & 0 \\ -3 & 6 & -4 & 6 & -7 \end{bmatrix}.$$

これを簡約化すると、第 2 行に第 1 行の 2 倍を足し、第 3 行に第 1 行の 3 倍を足して、

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & -12 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & -1 \end{bmatrix}.$$

第 3 行に -1 をかけ、第 2 行と入れ替えて、

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & -12 & 4 \end{bmatrix}.$$

第 1 行から第 2 行を引き、第 3 行から第 2 行の 4 倍を引いて、

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

これは簡約行列であり、対応する連立１次方程式は

$$\begin{cases} x - 2y + 2w = 1, \\ x - 3w = 1. \end{cases}$$

ここで $y = a$, $w = b$ とおくことで、答えは

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + 2a - 2b \\ a \\ 1 + 3b \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + a \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

である。ただし、a, b は任意のスカラーである。

問題 $\boxed{2}$

次の行列式の値を求めよ。

(1) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$.

(2) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & -4 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 4 & 4 \end{vmatrix}$.

解答

(1) 行列式の定義に従って計算すると問題文の行列式 D はサラスの方法より、

$$\begin{aligned} D &= 2\cdot 2\cdot(-1)+3\cdot 2\cdot 1+(-1)\cdot(-1)\cdot 1-2\cdot 2\cdot 1-3\cdot(-1)\cdot(-1)-(-1)\cdot 2\cdot 1 \\ &= -4+6+1-4-3+2 \\ &= -2. \end{aligned}$$

よって答えは -2 である。

(2) 基本変形すると問題文の行列式 D は第 1 行と第 2 行を入れ替えて、

$$D = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 & 0 \\ 3 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 4 & 4 \end{vmatrix}.$$

第 2 行から第 1 行の 3 倍を引き、第 4 行から第 1 行の 2 倍を引いて、

$$D = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -16 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & -4 & 4 \end{vmatrix}.$$

よって第 1 列は第 1 行以外の成分がすべて 0 なので、

$$D = -\begin{vmatrix} 1 & -16 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 4 & -4 & 4 \end{vmatrix}.$$

第 3 行から 4 を括り出して、

$$D = -4\begin{vmatrix} 1 & -16 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}.$$

第 2 行に第 1 行を足し、第 3 行から第 1 行を引いて、

$$D = -4\begin{vmatrix} 1 & -16 & 2 \\ 0 & -13 & 2 \\ 0 & 15 & -1 \end{vmatrix}.$$

よって第 1 列は第 1 行以外の成分がすべて 0 なので、

$$D = -4\begin{vmatrix} -13 & 2 \\ 15 & -1 \end{vmatrix}.$$

あとはサラスの方法で

$$D = -4(-13\cdot(-1)-2\cdot 15) = -4\cdot(13-30) = 68.$$

よって答えは 68 である。

問題 $\boxed{3}$

次の集合は数ベクトル空間 $\mathbb{R}^4$ の部分空間である（証明不要）。その次元を求めよ。

(1) $$\left\{ k_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + k_3 \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} + k_4 \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \mid k_1, k_2, k_3, k_4 \in \mathbb{R} \right\}.$$

(2) $$\left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid x + 2y + 3z + w = 0,\ -x + y + 3z + 2w = 0,\ y + z + w = 0 \right\}.$$

解答

(1) ベクトルを並べて得られる行列

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

の階数を計算する。第 1 行と第 2 行を入れ替えて、

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

第 3 行と第 4 行から第 1 行を引いて、

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & -2 \end{bmatrix}.$$

第 2 行を 2 で割って、

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & -2 \end{bmatrix}.$$

第 1 行から第 2 行を引き、第 3 行から第 2 行を引き、第 4 行から第 2 行の 2 倍を引いて、

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

これは簡約行列であり、その階数は 2 である。したがって答えの次元も 2 である。

(2) 係数行列

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

の階数を計算する。第 2 行に第 1 行を足して、

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

第 3 行を 3 で割って、

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

第 1 行から第 2 行の 2 倍を引き、第 3 行から第 2 行を引いて、

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

第 3 行を -1 倍して、

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

第 1 行に第 3 行を足し、第 2 行から第 3 行の 2 倍を引いて、

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

これは簡約行列であり、その階数は 3 である。したがって答えの次元は次元定理により $4 - 3$ で 1 である。

注意　ちなみにそれぞれの部分空間の基底の例を求めると、(1) は

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix},$$

で、(2) は

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

などとなります。

問題 $\boxed{4}$

次の正方行列の固有値と固有ベクトルを求めよ。

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

解答　問題文の行列を A とおくと固有多項式はサラスの方法より、

$$\begin{aligned} \det(A-\lambda E) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (1-\lambda)^2(-\lambda)-(1-\lambda)-(1-\lambda) \\ &= (1-\lambda)(\lambda^2-\lambda-1-1) \\ &= (1-\lambda)(\lambda+1)(\lambda-2) \end{aligned}$$

よって固有値は固有方程式 $\det(A-\lambda E)=0$ を解いて、$\lambda=-1,1,2$ でありすべて 1 重である。固有値 $\lambda=-1$ に対して、

$$A-\lambda E = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

であり、固有ベクトルはこの行列をかけると零ベクトルになるものなので、例えば

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

がある。固有値 $\lambda=1$ に対して、

$$A-\lambda E = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

であり、固有ベクトルの例として

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

がある。固有値 $\lambda=2$ に対して、

$$A-\lambda E = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

であり、固有ベクトルの例として

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

がある。以上より答えの固有値と固有ベクトルは、固有値 -1 に対して固有ベクトル $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$、固有値 1 に対して固有ベクトル $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$、固有値 2 に対して固有ベクトル $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ である。

注意　固有ベクトルはスカラー倍してもよいです。